دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شــماره از ماه‌نامه، ۱۰ مســئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل dpi۱۵۰) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۵۱. اگر x و y دو زاویهٔ حاده باشند، به‌طوری که: $(۱-\cot x)(۱-\cot y)=۲$، مطلوب است مقدار $x+y$.

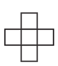
۲۵۲. در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_۱+a_۳+a_۵+a_۷=۵۱۰۲$ و $a_۲+a_۴+a_۶=۲۰۱۵$. مطلوب است مقدار: $S=a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_۷^۲$

۲۵۳. فرض کنید $n+۱$ عددی اول باشد. ثابت کنید kاُمین جمله از سطر nام مثلث خیام ـ پاسکال مضرب k است $(۱\le k\le n)$.

۲۵۴. چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و $x^۲$ عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

۲۵۵. همهٔ جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲-x[x]=۹۵$ را به‌دست آورید.

۲۵۶. با فرض $S=\cos ۷۲^\circ+\cos ۱۴۴^\circ$ و $T=\cos ۷۲^\circ-\cos ۱۴۴^\circ$، ثابت کنید: $۲ST=-T$. سپس مقدار $\cos ۷۲^\circ$ را به‌دست آورید.

۲۵۷. موزاییک‌هایی به شکل  در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین ۸×۸، حداکثر ۸تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.

۲۵۸. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{۱۰۱}+\frac{۴}{۱۰۰۰۱}+\frac{۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰۱}+\dots+\frac{۱۰۲۴}{۱۰۰۰..۰۰۱}=\frac{۲}{۹۹}-\frac{۲۰۴۸}{۹۹۹...۹۹}$$

در طرف اول، هر کسر صورتی برابر ۲^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسر $۲^k-۱$ است. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج ۲۰۴۸ رقم ۹ دارد.

۲۵۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (A قائمه است)، طول میانهٔ AM برابر ۵ و طول میانهٔ CN برابر $۲\sqrt{۱۰}$ است. طول وتر مثلث را به‌دست آورید.

۲۶۰. الان سن من سه برابر سن پسرم است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسرم ۴۴ بود. پسرم الان چند سال دارد؟

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۲۲۱. اگر: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$، مقدار عبارت $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$ را بیابید.

فرض را یک‌بار در a، یک‌بار در b و یک‌بار در c ضرب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$(\frac{a^2}{b+c}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+b})+(\frac{ab}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{bc}{a+b})$$

$$+(\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{a+c}+\frac{c^2}{a+b})=a+b+c$$

$$\Rightarrow(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b})+a+b+c=a+b+c$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

۲۲۲. مجموع همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+5x+5)^{x^2-10x+21}=1$ را بیابید.

برای برقراری این تساوی یا باید داشته باشیم: $x^2-10x+21=0$ یا: $x^2+5x+5=1$ و یا اینکه پایه برابر ۱- و توان زوج باشد. در حالت اول، دو ریشهٔ ۳ و ۷ به‌دست می‌آیند. در حالت دوم، ریشه‌های ۴- و ۱- به‌دست می‌آیند که هر دو قابل قبول هستند و در حالت سوم ریشهٔ ۳- به‌دست می‌آید. مجموع آن‌ها برابر است با ۲.

۲۲۳. چندجمله‌ای $f(x)$ در تساوی زیر صدق می‌کند. ضابطهٔ f را بیابید.

$$f(x)+(x+1)^3=2f(x+1)$$

فرض کنید f از درجهٔ k باشد و: $k\neq3$. در این‌حالت ضریب x^k در دو طرف تساوی برقرار نخواهد بود. پس f از درجهٔ ۳ است. با فرض $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ و جای‌گذاری در تساوی به پاسخ زیر می‌رسیم:

$$f(x)=x^3-3x^2+9x-13$$

۲۲۴. اگر: $|a-b|=2$، $|b-c|=3$ و $|c-d|=4$، مجموع همهٔ مقادیر ممکن برای a-d را بیابید.

چون داریم: $a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)$ و برای a-b ، b-c و c-d هر کدام دو مقدار قرینه وجود دارد، در مجموع هشت مقدار مختلف برای a-d حاصل می‌شود که دوتادوتا قرینه هم هستند. پس مجموع مقادیر ممکن برای a-d صفر است.

۲۲۵. مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با: 10^{1395}، اما هیچ‌کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند.

تنها اعدادی که مقسوم‌علیه 10^{1395} هستند و رقم صفر ندارند، 2^{1395} و 5^{1395} هستند، پس مجموع خواسته شده برابر جمع این دو عدد خواهد بود.

۲۲۶. برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر رادیکال چندتاست؟

$$\sqrt{17^2+17^2+...+17^2}=17^2+17^2+17^2$$

اگر تعداد جملات n باشد، داریم: $\sqrt{n\times17^2}=3\times17^2$.

در نتیجه: $n=\frac{(3\times17^2)^2}{17^2}$. بنابراین: $n=9\times17^2$.

۲۲۷. x را بیابید، اگر $x!=\frac{(7!)!}{7!}$.

چون: $(n-1)!=\frac{n!}{n}$، پس: $x!=(7!-1)!$. در نتیجه: $x=7!-1$.

۲۲۸. دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ $9^{8^{7^{6^5}}}$ را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

چون: $9^{10}\overset{100}{\equiv}1$، پس باید $8^{7^{6^5}}$ را به پیمانه ۱۰ حساب کنیم.

داریم: $8^{7^{6^5}}\overset{10}{\equiv}-2^{7^{6^5}}$. توان‌های ۲ به پیمانهٔ ۱۰، متناوب هستند با دورهٔ تناوب ۴. پس باید 7^{6^5} را به پیمانهٔ ۴ حساب کنیم: $7^{6^5}\overset{4}{\equiv}+1$.

پس: $7^{6^5}=4k+1$ و: $2^{7^{6^5}}\overset{10}{\equiv}2$. در نتیجه: $8^{7^{6^5}}=10k'+8$.

بنابراین: $9^{8^{7^{6^5}}}\overset{100}{\equiv}9^{10k'+8}\overset{100}{\equiv}9^8$. دو رقم اول 9^8 عبارت‌اند از ۲۱.

۲۲۹. همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $\frac{(n+1)^7}{n+7}$ عددی صحیح باشد.

$$(n+1)^7\overset{n+7}{\equiv}(-6)^2\Rightarrow n+7|6^2\Rightarrow n+7|2^2\times3^2$$

پس n+7 می‌تواند اعداد ۹، ۱۲، ۱۸ و ۳۶ باشد. در نتیجه n می‌تواند مقادیر ۲، ۵، ۱۱ یا ۲۹ باشد.

۲۳۰. همهٔ اعداد اول p را بیابید، به‌طوری که عدد p رقمی $\overline{111...1}$ مضرب p باشد.

عدد p رقمی $\overline{11...1}$ فرد است، پس p برابر ۲ نیست. برای p=3 حکم برقرار است. اگر p=5، آن‌گاه: $\overline{11\ldots1}\overset{5}{\equiv}1$ که نشان می‌دهد: $p\neq5$. برای هر عدد اول $p>5$ می‌دانیم: $10^p\overset{p}{\equiv}10$. پس: $10^p-1\overset{p}{\equiv}9$ و چون $(p,9)=1$ و: $\frac{10^p-1}{9}\overset{p}{\equiv}1$. یعنی عدد مذکور بر p بخش‌پذیر نیست. پس تنها جواب ۳ است.